المحاضرة الحادية عشرة

مبرهنة (2) ص 198

نفرض ان التابع $g(x)$ مستمر على $]-\infty,+\infty[$ ونعرف

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} e^{sx} f(x)\,dx \quad (1)$$ انا

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} g(x)\,dx \quad (2)$$

البرهان: نفرض التحويل

$$s=\sigma-\tau i$$

$$s=\sigma-i\infty \Rightarrow \sigma-\infty i=\sigma-\tau i \Rightarrow \tau=\infty$$

$$s=\sigma+i\infty \Rightarrow \sigma+\infty i=\sigma-\tau i \Rightarrow \tau=-\infty$$

$$ds=-i\,d\tau$$

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma-\tau i)x} f(\sigma-\tau i)(-i\,d\tau)$$

[redacted] $$=\frac{1}{2\pi} e^{\sigma x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau i x} f(\sigma-\tau i)\,d\tau$$

$$e^{-\sigma x} g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma-\tau i)\, e^{-\tau x i}\,d\tau$$

نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ e^{uxi} ثم نكامل الناتج بالنسبة لـ x من $x=-\infty$ الى $x=+\infty$ نجد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sigma-ui)x} g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xui}\,dx\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma-\tau i)\, e^{-\tau x i}\,d\tau$$

واذا لاحظنا ان دستور فورييه قابل للتطبيق على التابع $f(\sigma-\tau i)$ باعتباره تابعاً للمتحول الحقيقي τ عندئذ

$$f(\sigma-ui)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xui}\,dx\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma-\tau i)\, e^{-\tau x i}\,d\tau$$

بالتالي نحصل على

$$f(\sigma - ui) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sigma - ui)x} g(x)\, dx$$

نبدل كل $\sigma - ui$ بـ s نحصل على

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} g(x)\, dx$$

ملاحظة انسى العلاقة $f(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} g(x)\, ds$ تحويل لابلاس وحيد الجانب

اما $f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} g(x)\, dx$ يسمى تحويل لابلاس ثنائي الجانب

ملاحظة 2 كثيراً ما يرمز للتكاملين في الطرف الايمن من العلاقتين السابقتين :

بـ $L_1(g)$ و $L_2(g)$ على الترتيب

وحيد الجانب $L_1(g) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} g(x)\, dx$

ثنائي الجانب $L_2(g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} g(x)\, dx$

ايضاً التحويلات $L_1(g)$ و $L_2(g)$ تحويلات خطية اي

$$L_1(c_1 g) = c_1 L_1(g)$$

$$L_1(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 L_1(g_1) + c_2 L_1(g)$$

$$L_2(c_1 g) = c_1 L_2(g)$$

$$L_2(c_1 g + c_2 g) = c_1 L_2(g) + c_2 L_2(g)$$

ملفوف التابع ليكن $g_1(x)$, $g_2(x)$ تابعين مستمرين معرفين عندما $x \geq 0$ نسمي التابع المعرف بالعلاقة

$$g_3(x) = \int_{0}^{x} g_1(t)\, g_2(x - t)\, dT$$

ونرمز لملفوف هذين التابعين بـ $g_1 * g_2$

$$g_1 * g_2 = \int_{0}^{x} g_1(t)\, g_2(x - T)\, dT$$

سؤال عرف ملفوف تابعين ثم اثبت ان

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1$$

البرهان

$$g_1 * g_2 = \int_{0}^{x} g_1(t)\, g_2(x - T)\, dT$$

نفرض $x - T = \tau \Rightarrow dT = -d\tau$

$T = x - \tau$

$T = 0 \Rightarrow \tau = x$

$T = x \Rightarrow \tau = 0$

$$g_1 * g_2 = \int_{x}^{0} g_1(x - \tau)\, g_2(\tau)(-d\tau)$$

$$= \int_{0}^{x} g_2(\tau)\, g_1(x - \tau)\, d\tau = g_2 * g_1$$

نظرية الملف اثبت

$$L_1(g_1 * g_2) = L_1(g_1) \cdot L_1(g_2)$$

البرهان

بأخذ الطرف الايمن وبالاعتماد على تعريف تحويل لابلاس وحيد الجانب نستطيع ان نكتب

$$L_1(g_1) L_1(g_2) = \int_{0}^{\infty} e^{-su} g_1(u)\, du \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-sv} g_2(v)\, dv$$

تحت اجرائنا [illegible] لمتحولي التكامل بـ u, v يمكن كتابة هذا الجداء على شكل تكامل ثنائي متقارب اطلاقاً ومنتظم على

الربع الاول من المستوي Ouv

$$\int_0^\infty e^{-su} g_1(u)\,du \cdot \int_0^\infty e^{-sv} g_2(v)\,dv =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)} g_1(u)\, g_2(v)\,du\,dv$$

ويتبع من هذه العلاقة امكانية كتابة $L_1(g_1).L_1(g_2)$ على شكل تكامل ثنائي من التقارب المطلق للتكاملين السابقين مباشرة بتعريف التحويل التالي

$x = u + v$

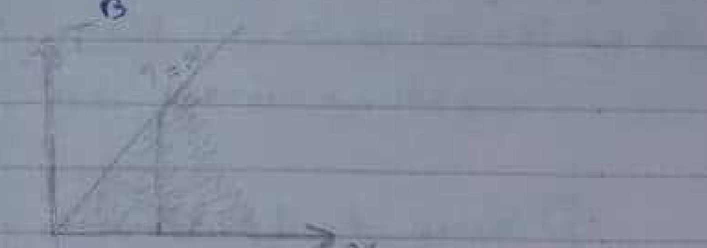
$u = x - v \qquad du = dx$

$T = v \Rightarrow dv = dt$

عندئذ نحصل على التكامل الثنائي المتقارب اطلاقاً

$$L_1(g_1)L_1(g_2) = \int_0^\infty e^{-su} g_1(u)\,du \cdot \int_0^\infty e^{-sv} g_2(v)\,dv$$

$$= \iint_B e^{-sx} g_1(x-T)\, g_2(t)\,dt\,dx$$



حيث تعرف منطقة المكاملة في المتحولات القديمة u , v بالمتراجحتين

$u \geq 0$, $v \geq 0$

وفي المتحولات الجديدة بالمتراجحتين

$T \geq 0$, $x - T \geq 0$

أي ان منطقة المكاملة في المستوي OxT هي ذلك الجزء في الربع الاول الذي يقع تحت المنصف $T = x$

وإذا حولنا التكامل الثنائي هنا الى تكاملين متتاليين سنحصل على

$$L_1(g_1)L_1(g_2) = \int_0^\infty e^{-sv} g_1(u)\,du \cdot \int_0^\infty e^{-sv} g_2(v)\,dv$$

$$= \iint_B e^{-sx} g_1(x-T)\, g_2(t)\,dt\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^x g_1(x-T)\, g_2(t)\,dt\right) dx$$

بالاعتماد على تعريف ملفوف تابعين نستطيع ان نكتب

$$L_1(g_1)L_1(g_2) = \int_0^\infty e^{-sx}(g_1 * g_2)\,dx$$

وبالاعتماد على تعريف لابلاس ومن السابقة

$$L_1(g_1).L_1(g_2) = L_1(g_1 * g_2)$$

وهو المطلوب

سؤال: نفرض ان التكامل $\int_0^\infty e^{-su} g_1(u)\,du \cdot \int_0^\infty e^{-sv} g_2(v)\,dv$ متقارب في نصف المستوي $\sigma > \alpha$ فإن التكامل المتابع $g_3(x)$ يكون متقارب كذلك أي سوف نثبت ان

$$L_1(g_3) = \int_0^\infty e^{-sx}(g_1 * g_2)\,dx$$

الاثبات

$$g_3(T) = g_1 * g_2 = \int_0^x g_1(x-T)\, g_2(t)\,dt$$

$$|g_3(x)| \leq \int_0^x |g_1(x-T)|\,|g_2(t)|\,dt$$

من هذه المتراجحة نحصل على المتراجحة

[illegible]

بضرب طرفي المتراجحة الأخيرة بـ $e^{-\sigma x}$ وتكامل بالنسبة لـ x من $x=0$ الى $x=m$

$$\int_0^m e^{-\sigma x}|g_1(x)|\,dx \le [illegible]$$

$$\le \int_0^m\left(\int_0^x |e^{-\sigma x}||g_1(x-t)||g_2(t)|\,dt\right)dx$$

وهذه المتراجحة نكتب بالاعتماد على دستور ديريخليه

$$\int_0^m e^{-\sigma x}|g_1(x)|\,dx \le \int_0^m |g_2(t)|\,dt \int_t^m |e^{-\sigma x}||g_1(x-t)|\,dx$$

وإذا استبدلنا x للطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة متحول المكاملة فنحصل على الشكل

$\tau = x - t \Rightarrow x = \tau + t$ ونحصل

$x = t \Rightarrow \tau = 0$ ، $dx = d\tau$

$x = m \Rightarrow \tau = m - t$

بالتالي إن الشكل

$$\int_0^m e^{-\sigma x}|g_1(x)|\,dx \le \int_0^m |g_2(t)|\,dt \int_0^{m-t} e^{-\sigma(\tau+t)}|g_1(\tau)|\,d\tau$$

$$\le \int_0^m e^{-\sigma t}|g_2(t)|\,dt \int_0^{m-t} e^{-\sigma \tau}|g_1(\tau)|\,d\tau$$

ونأخذ بطرفي المتراجحة الآتية نهاية

$$\int_0^\infty e^{-\sigma x}|g(x)|\,dx \le \int_0^\infty e^{-\sigma t}|g_2(t)|\,dt \cdot \int_0^\infty e^{-\sigma \tau}|g_1(\tau)|\,d\tau$$

وهي الطرف لدينا التكامل في الطرف الأيمن متقارب إطلاقاً في نصف المستوي $Re\, s > \sigma$ وبالتالي التكامل المقابل لـ $g(x)$ يكون متقارباً وهذه العلاقة الأخيرة وهو المطلوب إثباته

ملاحظة: نظرية اللف صحيحة في حالة تحويل لابلاس وحيد الجانب

$$L_1(g) = L_1(g_1)\,L_1(g_2)$$

بمعنى الطرف $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\,g_2(x-t)\,dt$

تطبيق هام في معادلات من نوع التكامل

لتكن لدينا المعادلة التكاملية

$$g(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)\,g(t)\,dt \quad (1)$$

ونفرض أن تحويل لابلاس وحيد الجانب قابل للتطبيق على التوابع $g(x), f(x)$ و $k(x)$ أوجد هذه الدالة بالاعتماد على تحويل لابلاس وحيد الجانب

الحل

نطبق L_1 على المعادلة (1)

$$L_1(g) = L_1(f) + L_1\left(\int_0^x k(x-t)\,g(t)\,dt\right)$$

بالاعتماد على تعريف ملفوف تابعين نحصل على

$$L_1(g) = L_1(f) + L_1(k * g)$$

وأيضاً بالاعتماد على نظرية اللف نحصل على

$$L_1(g) = L_1(f) + L_1(k)\,L_1(g)$$

وبفرض أن

$$L(s) = L_1(k) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, k(x)\, dx$$

$$F(s) = L_1(f) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, f(x)\, dx \quad ②$$

$$\phi(s) = L_1(g) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, g(x)\, dx \quad ③$$

نحصل على

$$\phi(s) = F(s) + L(s)\,\phi(s)$$

$$\phi(s)\,[1 - L(s)] = F(s)$$

$$\phi(s) = \frac{F(s)}{1 - L(s)} \quad ④$$

وبتطبيق هـ النظرية ① في ③ نحصل على

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} e^{sx}\, \phi(s)\, ds$$